EPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

CONCOURS 1988 — OPTIONS M et P' — DURÉE : 2 heures

Le but du problème est de décrire un procédé simple et rapide pour calculer des logarithmes népériens (notations Log).

Pour cela, on démontre dans la partie I qu'il suffit de connaître les logarithmes de quelques nombres. La partie II, indépendante de I, fait calculer ces logarithmes, et la partie III traite un exemple.

I

Soit A un réel compris entre 1 et 10 et la suite (a_p) définie par :
$a_p = 1 + 10^{-p}$, (Rem : $a_0 = 2$). On cherche à exprimer Log A à l'aide des Log a_p.

1. On pose : $x_1 = a_{s(1)}\,A$ où $a_{s(1)}$ est le plus grand des a_k tels que $a_k A \leqslant 10$, c'est-à-dire : $a_{s(1)}\,A \leqslant 10 < a_{s(1)-1}\,A$.

   $x_2 = a_{s(2)}\,x_1$, où $a_{s(2)}$ est tel que : $a_{s(2)}\,x_1 \leqslant 10 < a_{s(2)-1}\,x_1$. etc.

   $x_n = a_{s(n)}\,x_{n-1}$ où $a_{s(n)}$ est tel que : $a_{s(n)}\,x_{n-1} \leqslant 10 < a_{s(n)-1}\,x_{n-1}$.

   a. Démontrer : $\lim (x_n) = 10$.

   b. On définit la suite (b_n) par : $b_0 = \text{Log } 10$ et $b_n = b_{n-1} - \text{Log } a_{s(n)}$.

   Prouver : $\lim (b_n) = \text{Log A}$.

2. On pose : $\varepsilon_n = 1 - \dfrac{x_n}{10}$.

   a. À l'aide d'une formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, donner une expression de $b_n - \text{Log A}$ en fonction de ε_n.

   b. On convient de ne considérer les a_k que pour k de 0 à 5. On prend pour valeur approchée de Log A, la valeur de b_n obtenue pour l'entier n tel que :

   $$x_n = a_0\,x_{n-1} \leqslant 10 \text{ et } 10 < a_0\,x_n.$$

   Prouver qu'alors : $b_n - \varepsilon_n - \dfrac{1}{2}\varepsilon_n^2 \in \left]\text{Log A}, \text{Log A} + \dfrac{1}{3}\cdot 10^{-16}\right[$.

II

Soit : $u_k = \dfrac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)}$ et $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$.

1. En utilisant la série de somme f', donner l'expression de f', puis de f pour $x \in]-1, +1[$.

2. On pose : $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$.

   a. Pour $0 < x < 1$, prouver :

   $$R_n(x) < \frac{1}{(n+2)(n+3)} \cdot \frac{x^{n+3}}{1-x}.$$

   b. Calculer la plus petite valeur de n, pour laquelle : $R_n\left(\frac{1}{5}\right) < 2.10^{-16}$.

   Calculer une valeur approchée de $f\left(\frac{1}{5}\right)$ à 5.10^{-16} près. (On écrira sur la copie les termes $u_k\left(\frac{1}{5}\right)$ avec 17 décimales, en groupant celles-ci trois par trois, à partir de la virgule, comme $u_5\left(\frac{1}{5}\right) = 0{,}000\,000\,304\,761\,904\,88$.)

3. On donne : Log 2 = 0,693 147 180 559 945 3.

   a. À partir de $f\left(\frac{1}{5}\right)$ calculer Log 5 à 5.10^{-16} près.

   On donnera la méthode pratique utilisée pour ce calcul.

   b. En déduire Log 10 à 5.10^{-16} près.

4. *a.* Évaluer en fonction de n, un majorant de $[R_n(-x)]$ pour $x \in]0,1[$, et calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $\left|R_n\left(-\frac{1}{10}\right)\right| < 10^{-16}$, puis celle pour laquelle $\left|R_n\left(-\frac{1}{100}\right)\right| < 10^{-16}$.

   b. Calculer $f\left(-\frac{1}{10}\right)$ et $f\left(-\frac{1}{100}\right)$ à 5.10^{-16} près.

   c. En déduire Log (1,1) et Log (1,01) à 5.10^{-16} près.

5. En utilisant le développement en série entière de Log $(1 + x)$, calculer, pour p entier de 3 à 5, Log $(1 + 10^{-p})$ à 5.10^{-16} près.

III

À l'aide de la méthode exposée dans I, des résultats de II, et du terme correctif $\varepsilon_n + \frac{1}{2}\varepsilon_n^2$ de la partie I, calculer une valeur approchée de Log A, où A = 4,486 855.

On donnera un majorant de l'erreur, on expliquera les calculs et on choisira une disposition claire.

NB : cet énoncé comporte des erreurs...

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail